

ЮНИОРЫ, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Граф называется d -регулярным, если степени всех вершин в нем равны d . Каких остовных подграфов в полном графе на 2000 вершинах больше: 3-регулярных или 4-регулярных? (Остовными называются подграфы, содержащие все вершины исходного графа.)

2. На прямой BC в треугольнике ABC отметили точки K и L так, что $KM = ML$, где M — середина BC , а на прямых AB и AC отмечены точки X и Y соответственно так, что $XY \parallel BC$. Окружности (KBX) и (LCY) вторично пересекают (ABC) в точках B' и C' соответственно. T — точка пересечения прямых BC' и CB' . Докажите, что $\angle TAB = \angle MAC$.

3. На плоскости отмечены $n \geq 2$ точек, все попарные расстояния между которыми различны. Для каждой отмеченной точки X нашли ближайшую к ней отмеченную точку, покрасили её в красный цвет и соединили с X отрезком. Оказалось, что из каждой отмеченной точки можно добраться до любой другой, переходя из точки в точку по соединяющему их отрезку. Докажите, что красных точек не менее $(n - 2)/4$.

4. В неравностороннем остроугольном треугольнике ABC через ортоцентр H проведена прямая, перпендикулярная биссектрисе угла A , пересекающая стороны AB и AC в точках D и E соответственно. Пусть X — вторая точка пересечения описанных окружностей треугольников BDH и HEC . Докажите, что описанная окружность треугольника ANH касается биссектрисы угла BAC .

5. Последовательность $\{a_n\}$ задана условиями $a_1 = 1$, $a_{2k} = a_{2k-1} + a_k$ и $a_{2k+1} = a_{2k}$ при всех натуральных k . Докажите, что $\sum_{k=1}^{n \cdot 2^n} a_k > 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$ при всех натуральных n .

6. Дано натуральное число $n \geq 4$. Найдите все последовательности вещественных чисел (x_1, x_2, \dots, x_n) , которые удовлетворяют уравнениям:

$$x_1^3 + x_2 = x_2 x_3 + 1$$

$$x_2^3 + x_3 = x_3 x_4 + 1$$

\vdots

$$x_n^3 + x_1 = x_1 x_2 + 1$$

7. Назовём *правым сапогом* вертикальную полоску из $k \geq 1$ клетки, к которой снизу справа приклеена ещё одна клетка. *Левый сапог* определяется аналогично, только приклеиваемая клетка находится слева, и $k \geq 2$ (то есть горизонтальная доминошка — правый сапог, но не левый). Рассмотрим клетчатую лесенку ширины 100: это доска 100×100 , из которой убрали все клетки строго над главной диагональю, идущей из левого нижнего угла в правый верхний. Докажите, что в любом её разбиении на правые и левые сапоги найдутся хотя бы 50 левых сапогов.

8. На доске написана упорядоченная пара чисел $(1, 0)$. На каждом шаге пару (a, b) , написанную на доске, стирают и заменяют либо на $(a + b, b)$, либо на $(2a + b, a + b)$. Например, после двух шагов на доске может оказаться любая из пар $(1, 0)$, $(2, 1)$, $(3, 1)$, или $(5, 3)$. Докажите, что существует ровно 2^n различных упорядоченных пар, которые могут появиться на доске после n шагов.

9. Натуральные числа a и $b > 1$ таковы, что $a^2 + ab$ — произведение двух последовательных натуральных чисел. Докажите, что $b \geq 1 + \sqrt{4a + 1}$.

10. Назовём число *суммоквадратным*, если оно имеет вид $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ для некоторого натурального n . Верно ли, что существует бесконечно много натуральных чисел, которые не представимы в виде суммы двух суммоквадратных чисел?

XXVIII математический турнир старшеклассников “Кубок памяти А.Н. Колмогорова”
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 26.11.2025
ЮНИОРЫ, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. В классе несколько учеников. Среди любых шестерых найдутся двое незнакомых. Но для любых двух незнакомых среди любых четырех других учеников найдется знакомый с ними обоими. Какое наибольшее количество учеников может быть в классе?

2. Четырёхугольник $ABCD$ с наибольшей стороной AD описан вокруг окружности радиуса r . Докажите, что если $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$, то $r > BC$.

3. На плоскости отмечены $n \geq 2$ точек, все попарные расстояния между которыми различны. Для каждой отмеченной точки X нашли ближайшую к ней отмеченную точку, покрасили её в красный цвет и соединили с X отрезком. Оказалось, что из каждой отмеченной точки можно добраться до любой другой, переходя из точки в точку по соединяющему их отрезку. Докажите, что красных точек не менее $(n - 2)/4$.

4. В неравнобедренном остроугольном треугольнике ABC через ортоцентр H проведена прямая, перпендикулярная биссектрисе угла A , пересекающая стороны AB и AC в точках D и E соответственно. Пусть X — вторая точка пересечения описанных окружностей треугольников BDH и HES . Докажите, что описанная окружность треугольника ANH касается биссектрисы угла BAC .

5. Последовательность $\{a_n\}$ задана условиями $a_1 = 1$, $a_{2k} = a_{2k-1} + a_k$ и $a_{2k+1} = a_{2k}$ при всех натуральных k . Докажите, что $\sum_{k=1}^{n \cdot 2^n} a_k > 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$ при всех натуральных n .

6. Дано натуральное число $n \geq 4$. Найдите все последовательности вещественных чисел (x_1, x_2, \dots, x_n) , которые удовлетворяют уравнениям:

$$x_1^3 + x_2 = x_2 x_3 + 1$$

$$x_2^3 + x_3 = x_3 x_4 + 1$$

$$\vdots$$

$$x_n^3 + x_1 = x_1 x_2 + 1$$

7. Назовём *правым сапогом* вертикальную полоску из $k \geq 1$ клетки, к которой снизу справа приклеена ещё одна клетка. *Левый сапог* определяется аналогично, только приклеиваемая клетка находится слева, и $k \geq 2$ (то есть горизонтальная доминошка — правый сапог, но не левый). Рассмотрим клетчатую лесенку ширины 100: это доска 100×100 , из которой убрали все клетки строго над главной диагональю, идущей из левого нижнего угла в правый верхний. Докажите, что в любом её разбиении на правые и левые сапоги найдутся хотя бы 50 левых сапогов.

8. На доске написана упорядоченная пара чисел $(1, 0)$. На каждом шаге пару (a, b) , написанную на доске, стирают и заменяют либо на $(a + b, b)$, либо на $(2a + b, a + b)$. Например, после двух шагов на доске может оказаться любая из пар $(1, 0)$, $(2, 1)$, $(3, 1)$, или $(5, 3)$. Докажите, что существует ровно 2^n различных упорядоченных пар, которые могут появиться на доске после n шагов.

9. Натуральные числа a и $b > 1$ таковы, что $a^2 + ab$ — произведение двух последовательных натуральных чисел. Докажите, что $b \geq 1 + \sqrt{4a + 1}$.

10. Назовём число *суммоквадратным*, если оно имеет вид $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ для некоторого натурального n . Верно ли, что существует бесконечно много натуральных чисел, которые не представимы в виде суммы двух суммоквадратных чисел?

XXVIII математический турнир старшеклассников “Кубок памяти А.Н. Колмогорова”
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 26.11.2025
ЮНИОРЫ, ВТОРАЯ ЛИГА

1. В классе несколько учеников. Среди любых шестерых найдутся двое незнакомых. Но для любых двух незнакомых среди любых четырех других учеников найдется знакомый с ними обоими. Какое наибольшее количество учеников может быть в классе?

2. Четырёхугольник $ABCD$ с наибольшей стороной AD описан вокруг окружности радиуса r . Докажите, что если $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$, то $r > BC$.

3. На плоскости отмечены $n \geq 2$ точек, все попарные расстояния между которыми различны. Для каждой отмеченной точки X нашли ближайшую к ней отмеченную точку, покрасили её в красный цвет и соединили с X отрезком. Оказалось, что из каждой отмеченной точки можно добраться до любой другой, переходя из точки в точку по соединяющему их отрезку. Докажите, что красных точек не менее $(n - 2)/4$.

4. В неравнобедренном остроугольном треугольнике ABC через ортоцентр H проведена прямая, перпендикулярная биссектрисе угла A , пересекающая стороны AB и AC в точках D и E соответственно. Пусть X — вторая точка пересечения описанных окружностей треугольников BDH и HEC . Докажите, что описанная окружность треугольника ANH касается биссектрисы угла BAC .

5. Последовательность $\{a_n\}$ задана условиями $a_1 = 1$, $a_{2k} = a_{2k-1} + a_k$ и $a_{2k+1} = a_{2k}$ при всех натуральных k . Докажите, что $a_{2^n} < 2^{\frac{n^2}{2}}$ при натуральных $n > 2$.

6. Для положительных чисел $a \geq b \geq c \geq d$ с суммой 2 докажите неравенство

$$ab(b + c) + bc(c + d) + cd(d + a) + da(a + b) \leq 1.$$

7. Назовём *правым сапогом* вертикальную полоску из $k \geq 1$ клетки, к которой снизу справа приклеена ещё одна клетка. *Левый сапог* определяется аналогично, только приклеиваемая клетка находится слева, и $k \geq 2$ (то есть горизонтальная доминошка — правый сапог, но не левый). Рассмотрим клетчатую лесенку ширины 100: это доска 100×100 , из которой убрали все клетки строго над главной диагональю, идущей из левого нижнего угла в правый верхний. Докажите, что в любом её разбиении на правые и левые сапоги найдутся хотя бы 50 левых сапогов.

8. На доске написана упорядоченная пара чисел $(1, 0)$. На каждом шаге пару (a, b) , написанную на доске, стирают и заменяют либо на $(a + b, b)$, либо на $(a, a + b)$. Например, после двух шагов на доске может оказаться любая из пар $(1, 0)$, $(2, 1)$, $(3, 1)$, или $(5, 3)$. Докажите, что существует ровно 2^n различных упорядоченных пар, которые могут появиться на доске после n шагов.

9. Натуральные числа a и $b > 1$ таковы, что $a^2 + ab$ — произведение двух последовательных натуральных чисел. Докажите, что $b \geq 1 + \sqrt{4a + 1}$.

10. Назовём число *суммоквадратным*, если оно имеет вид $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ для некоторого натурального n . Верно ли, что существует бесконечно много натуральных чисел, которые не представимы в виде суммы двух суммоквадратных чисел?